Example

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, and define a transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ by $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, so that

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{bmatrix}$$

a. Find $T(\mathbf{u})$, the image of $\mathbf{u}$ under the transformation T.

b. Find an $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^2$ whose image under T is $\mathbf{b}$.

c. Is there more than one $\mathbf{x}$ whose image under T is $\mathbf{b}$?

d. Determine if $\mathbf{c}$ is in the range of the transformation T.

a. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$

b. $\left.\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 = 3 \\ -x_1 + 7x_2 = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 = \frac{3}{2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 = 2 \\ \Rightarrow x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$ ✓

c. چون، معادله جواب یکتا داشت

d. $\left.\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 = 3 \\ -x_1 + 7x_2 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow x_2 = 2 \,,\, x_1 = 9 \Rightarrow 3x_1 + 5x_2 = 37$ ✗

پس در برد آن نیست.

Theorem

Let $(v_1,\ldots,v_n)$ be a ordered basis of finite-dimensional vector space V over the field $\mathbb{F}$ and $(w_1,\ldots,w_n)$ an arbitrary list of any vectors in W. Then there exists a unique linear map

$$T : V \to W \qquad \text{such that } T(v_i) = w_i.$$

Proof

تعریف می‌کنیم برای هر عنصر $T(a_1v_1+\dots+a_nv_n)=a_1w_1+\dots+a_nw_n$ ، در واقع چون هر عنصر را می‌توان

به فرم $\sum a_iv_i$ نوشت، این تعریف درست است. قطعاً یک linearmap است زیرا بسته بودن به جمع و ضرب

از این تعریف به دست می‌آید، حال صرفاً باید ثابت کنیم که یکتاست. می‌دانیم چون $T(c_1v_1)=c_1w_1$ ،

دو عنصر را به طور دیگه دیگه یکسان به فرم $\sum c_iv_i$ نوشت، پس طرف سمت چپ تساوی نیز unique در می‌آید.

Example

Which are linear mapping?

- ❑ **zero** map $0 : V \rightarrow W$ $\quad T(a+b)=T(a)+T(b)=0$, $T(\lambda a)=\lambda T(a)=0$
- ❑ **identity** map $I : V \rightarrow V$ $\quad T(a+b)=T_a+T_b=a+b$, $T(\lambda a)=\lambda T a=\lambda a$
- ❑ Let $T : \mathcal{P}(\mathbb{F}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{F})$ be the **differentiation** map defined as $T_{\mathcal{P}(z)} = \mathcal{P}'(z)$ $\quad$ واضحاً بله
- ❑ $\boxed{\text{Let } T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ be the map given by } T(x, y) = (x - 2y, 3x + y)}$ $\quad T=\begin{bmatrix}1&-2\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$
- ❑ $T(x) = e^x$ $\quad e^{x+y} \neq e^x + e^y$ ✗ $\quad \boldsymbol{T(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)}$
- ❑ $T : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ given by $T(x) = x - 1$ $\quad (x+y)-1 = T(x+y) = T_x + T_y = x+y-2$ ✗ نیست

Definition

Let S and $T \in L(V, W)$ and $\lambda \in \mathbb{F}$. The sum $S + T$ and the product λT are the linear maps from V to W defined by:

$$(S + T)(v) = Sv + Tv \text{ and } (\lambda T)(v) = \lambda(Tv)$$

For all $v \in V$.

Theorem

additive identity $\Rightarrow U(v) = 0$

With the addition and scalar multiplication as defined above, $L(V, W)$ is a vector space.

Proof

$S + T = T + S$ ☑

$(S+T)+Y = S+(T+Y)$ ☑

$S + U = S$ ☑

$S'(v) = -S(u) \Rightarrow$ وارون‌پذیر است ☑

$\alpha(\beta S) = (\alpha\beta) S'$ ☑

$(\alpha+\beta) S' = \alpha S' + \beta S'$ ☑

$\alpha(S+T) = \alpha S' + \alpha T$ ☑

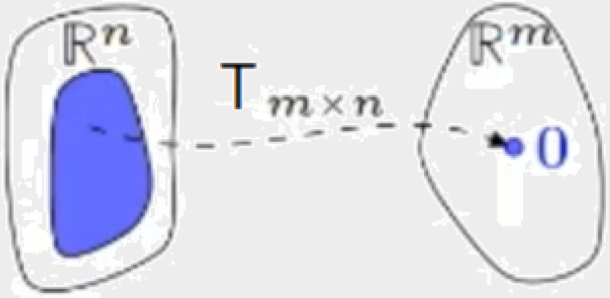
$1T(v) = T(1v) = T(v)$

Definition

Let $T: V \to W$ be a linear map. Then the **null space or kernel of T** is the set of all vectors in V that map to zero:

$$N(T) = Null(T) = \{v \in V \mid Tv = 0\}$$

- $Nullity(T) := Dim(Null(T))$



Null Space

Theorem

Suppose $T \in L(V, W)$. Then null T is a subspace of V.

Proof

1) $T(0+0) = 2T(0) \Rightarrow T(0) = 0 \Rightarrow$ 0 عضو آن هست

2) $T(u+v) = T(u) + T(v) = 0+0 \Rightarrow u, v \in \text{null}(T) \Rightarrow u+v \in \text{null}\, T$

3) $\lambda T(u) = T(\lambda u) = 0$ $\boxed{\checkmark}$ $\Rightarrow u \in \text{null}\, T \Rightarrow \lambda u \in \text{null}\, T$

Theorem

Suppose $T \in L(V, W)$. Then null T is vector space.

چون V فضای برداری است و null T که زیرفضای آن است پس خود یک فضای برداری است.

Example

Find Null Space T?

- **zero** map $0 : V \to W$ all v
- Let $T : \mathcal{P}(\mathbb{F}) \to \mathcal{P}(\mathbb{F})$ be the **differentiation** map defined as $T_{\mathcal{P}(z)} = \mathcal{P}'(z)$ $T(v) = C$ constant
- Let $T : C^3 \to C$ be the map given by $T(x, y, z) = x + 2y + 3z$ null $T = \begin{bmatrix} -2y - 3z \\ y \\ z \end{bmatrix}$
- $T(P(x)) = x^2 P(x)$ null $T = \{0\}$ چون باید برای همه برقرار باشد
- $T \in L(\mathbb{F}^\infty)$ given by $T(x_1, x_2, \ldots) \to (x_2, x_3, \ldots)$ null $T = (x_1, 0, 0, \ldots)$
- When is Nullity(T) = 0 ? when T is injective (یک‌به‌یک)

Range

Theorem

Suppose $T \in L(V,W)$. Then range T is a subspace of V.

Proof ۱ $T(0)=0 \Rightarrow$ 0 در برد هست

۲ $\exists v, w \quad T(v)=a,\ T(w)=b \Rightarrow T(v+w)=a+b \Rightarrow a \in \text{Range}\,T,\ b \in \text{Range}\,T \Rightarrow a+b \in \text{Range}\,T$

۳ $\exists v \quad T(v)=a \Rightarrow T(\lambda v)=\lambda T(v)=\lambda a \Rightarrow a \in \text{Range}\,T \Rightarrow \lambda a \in \text{Range}\,T$

Theorem

Suppose $T \in L(V,W)$. Then range T is vector space.

چون V فضای برداری است و Range T که زیرفضای آن است پس خود یک فضای برداری است.

Example

Find Range T?

- ❑ **zero** map $0 : V \rightarrow W$ only 0 is made Range T =
- ❑ Let $T : \mathcal{P}(\mathbb{F}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{F})$ be the **differentiation** map defined as $T_{\mathcal{P}(z)} = \mathcal{P}'(z)$

مشتق تمام چندجمله‌ای‌ها به شکل یک چندجمله‌ای است، از هر چندجمله‌ای مشتق بگیریم، عضوی که آن

شده بود را می‌دهد. پس $\text{Range}\, T = P(F)$

Injective and homogeneous linear equation

Theorem

Let $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be a linear transformation. Then T is one-to-one if and only if the equation T(x) = 0 has only the trivial solution.

Proof

Case 1 : T is injective $\Rightarrow$ دلخواه است زیرا اگر $T(v)=0$ باشد چون $T(0)=0$ پس $v=0$ است و ثابت می‌شود

Case 2 : برهان خلف : فرض کنید که یک به یک نباشد.

$$\left.\begin{array}{l} Tv = a \\ Tu = a \end{array}\right\} \Rightarrow Tu - Tv = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T(u-v)=0 \\ \text{only } T(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow u-v=0 \Rightarrow u=v$$

Theorem

Let $T: V \to W$ be a linear transformation. Then T is one-to-one if and only if the equation Null(T)={0} (Nullity(T)=0!).

Proof

دقیقاً اثبات بالایی جامع است و برای این نیز درست است.

Example

Example

Let T be the linear transformation whose standard matrix is

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Does T map $\mathbb{R}^4$ onto $\mathbb{R}^3$? Is T a one-to-one mapping?

بله : $A_{3\times 4} =$ ستون های آن IR^4 را span می‌کنند.

قسمت دوم : $AX = 0 \Rightarrow X = 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + 6x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -6x_3,\ x_2 = \frac{x_3}{2},\ x_4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -6x_3 \\ x_3/2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

چون ۴ بردار در فضای IR^3 داریم و $\dim IR^3 = 3$ پس نمی‌توانند مستقل خطی باشند.

به ازای هر x_3 جواب است پس یک به یک نمی‌باشد.

One-to-One Linear Transformation

Important

Let $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be a linear transformation, and let A be the standard matrix for T. Then:

a. T maps $\mathbb{R}^n$ onto $\mathbb{R}^m$ if and only if the columns of A span $\mathbb{R}^m$.
b. T is one-to-one if and only if the columns of A are linearly independence.

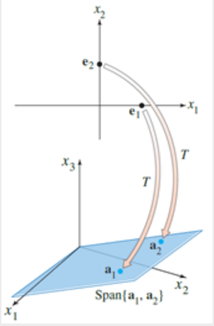
Example

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Let $T(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, 5x_1 + 7x_2, x_1 + 3x_2)$. Show that T is a one-to-one linear transformation. Does T map $\mathbb{R}^2$ onto $\mathbb{R}^3$?

$T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ ستون ها مستقل هستند ← یک به یک

ستون ها $\mathbb{R}^3$ را span نمی‌کنن ← پوشا نیست.



Example

Which one is surjective?

- ❑ $D \in L\big(P_5(R)\big)$ defined by $DP = P'$ → چندجمله‌ای‌های درجه ۵ را نمی‌سازد
- ❑ $S \in L(P_5(R), P_4(R))$ defined by $SP = P'$ → پوشا می‌باشد.

Theorem

Let V be a finite-dimensional vector space and $T \in L(V, W)$. Then rang T is finite-dimensional and

$$\mathrm{Dim}(V) = Nullity(T) + Dim(range(T))$$

Proof

یک پایه برای null T در نظر بگیرید، $u_1, u_2, \dots, u_m$ این پایه است. آن را به یک پایه V گسترش می‌دهیم. گسترش به $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$، داریم که $\dim V = m+n$. حال ثابت می‌کنیم $Tv_1, \dots, Tv_n$ یک پایه برای Range T هستند. چون هر $v \in V$ را می‌توان به فرم $\sum a_i u_i + \sum b_j v_j$ نوشت، پس ⇐

$$v = \sum a_i u_i + \sum b_j v_j \Rightarrow Tv = \sum b_j T(v_j)$$

چون برای هر v این را داریم، پس $Tv_1, \dots, Tv_n$ ها فضا را span می‌کنند.

حال فقط باید ثابت کنیم که مستقل هستند. ⇐

$$\sum a_i Tv_i = 0$$

$$\Rightarrow T\left(\sum a_i v_i\right) = 0 \Rightarrow \sum a_i v_i \in \text{null}\, T$$

$$\Rightarrow \sum a_i v_i = \sum b_j u_j \Rightarrow \sum a_i v_i - \sum b_j u_j = 0$$

و چون می‌دانیم که $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m$ مستقل خطی هستند پس تنها راه صفر شدن عبارت این است که

$$a_1 = a_2 = \dots = b_m = 0$$

باشد. که این به معنای این است که Tv_i ها مستقل خطی هستند پس یک پایه برای Range T می‌باشند.

dim V = dim null T + dim range

Corollary

Linear map to a lower–dimensional space is not injective.

$$\dim \operatorname{null} T = \dim V - \dim \operatorname{Range} T \geq \dim V - \dim W > 0$$

Proof

طبق قضیه ۷ اسلاید های قبل این نگاشت یک به یک نیست.

Corollary

Linear map to a higher–dimensional space is not surjective

$$\dim \operatorname{Range} T = \dim V - \dim \operatorname{null} T \leq \dim V < \dim W$$

Proof

طبق تعریف پوشایی ناممکن است.

Example

Is T injective or not?

$\overset{\overset{4}{\shortparallel}}{\dim F^4} > \overset{\overset{3}{\shortparallel}}{\dim F^3}$ خیر یک به یک نیست زیرا

$$T\colon \mathbb{F}^4 \to \mathbb{F}^3$$

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\sqrt{7}x_1 + \pi x_2 + x_4, 97x_1 + 3x_2 + 2x_3, x_2 + 6x_3 + 7x_4)$$